Idealtheorie in geordneten lokalkonvexen Vektorräumen

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Rainer Nagel
aus Horb a. N.

1969

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Juli 1969

Dekan:	Prof. Dr. A. Seilacher
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. H.H. Schaefer
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. K. Zeller

für U r s u l a

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.....1

§ 0 Vorbemerkungen.....6

§ 1 Vollperfekte Ideale.....8

§ 2 Vollperfekte Ideale in (A)-Funktionenräumen.....16

§ 3 Strukturraum und Zentrum.....25

§ 4 T-invariante Ideale.....33

§ 5 Vollperfekte Markov-Operatoren.....39

§ 6 Über das Spektrum positiver Operatoren in Simplexräumen.....47

Literaturverzeichnis.....50

Einleitung

In den Untersuchungen über geordnete abelsche Gruppen hat Clifford (|6|,u.a.) Untergruppen ausgezeichnet, die bezüglich der Ordnung saturiert sind. In geordneten Vektorräumen setzte sich für solche Unterräume die Bezeichnung (Ordnungs-) Ideal durch (Kadison |17|, Bonsall |4|). Im Falle einer Verbandsordnung hat aber Stone |26| einen wesentlich schärferen Idealbegriff eingeführt, der eine reichhaltige Theorie ergab (siehe: Birkhoff, lattice theory). Somit stellte sich das Problem, den Idealbegriff in beliebigen geordneten Vektorräumen so zu verschärfen, daß er dem des Verbandsideals in Vektorverbänden entsprach.

Kadison |17| bemerkte, daß man zu diesem Zweck in archimedisch geordneten Vektorräumen mit Ordnungseinheit unter den maximalen Ordnungsidealen solche auswählen muß,deren Polaren einen Extremalstrahl im dualen Kegel ergeben. Bonsall |5| gelang es dann, solche maximale *perfekte* Ideale durch die Ordnung des Raumes selbst zu charakterisieren. Für Räume ohne Ordnungseinheit zeigte schließlich Ellis |15| , wie man mit Hilfe einer lokalkonvexen Topologie den Begriff des perfekten Ideals verallgemeinern kann. Er bewies, daß in geordneten lokalkonvexen Räumen mit normalem Kegel ein Ideal genau dann

perfekt ist, wenn seine Polare im Dual ein Ideal ist.

Eine zweite Gruppe von Autoren verallgemeinerte die Idealtheorie der Räume vom Typ C(X). Effros |12| , Størmer | 27| und Alfsen | 1 | gingen dabei von *positiv- erzeugten* Idealen aus und entwickelten eine umfangreiche Theorie, deren Anwendungsbereich aber im wesentlichen auf Simplexräume und C^*-Algebren beschränkt bleibt.

Auf der anderen Seite stehen die Fortschritte der Idealtheorie in Banachverbänden, wie sie zum Beispiel in der Arbeit von Lotz | 21| zum Ausdruck kommen. Außerdem zeigten Schaefer | 24,25| , Lotz | 2o| und Wolff | 28| , daß die Ideale in Banachverbänden ein geeignetes Mittel zur Untersuchung von positiven Operatoren und deren Spektren darstellen.

Nun sind aber wichtige Räume der Analysis, z.B. die Räume von differenzierbaren Funktionen, keine Verbände, so daß auch die Untersuchung beliebiger geordneter Vektorräume von Interesse ist. Das Ziel dieser Arbeit ist deshalb, für beliebige geordnete lokalkonvexe Räume eine Idealtheorie zu entwickeln, ihre Anwendungsmöglichkeiten für spezielle Räume zu untersuchen und bekannte Ergebnisse in diese Theorie einzuordnen.

Zunächst geben wir eine kurze Übersicht über den Inhalt der einzelnen Abschnitte dieser Arbeit.

1. In beliebigen geordneten lokalkonvexen Räumen wollen wir Ideale charakterisieren und untersuchen,die in lokalkonvexen Vektorverbänden mit den abgeschlossenen Verbandsidealen zusammenfallen. Dazu definieren wir zunächst eine Hüllenoperation $\underline{G}$, die jedem Teilraum A ein *volles* Ideal $\underline{G}(A)$ zuord-

net, das Durchschnitt von maximalen, abgeschlossenen Idealen ist. Diese Eigenschaft verbinden wir dann mit dem Begriff des perfekten Ideals von Ellis zur Definition der *vollperfekten* Ideale. Neben elementaren Eigenschaften beweisen wir in (1.8) eine eineindeutige Beziehung zwischen den vollperfekten Idealen I und den extremalen Teilmengen $I^\circ \cap K'$ im dualen Kegel K'. Außerdem ergibt sich in E bzw. E'_σ eine genaue Dualität zwischen den vollperfekten Idealen I bzw. I°, deren Positivteil total in I bzw. I° ist.

2. (A)-Funktionenräume, das sind archimedisch geordnete Banachräume mit Ordnungseinheit und Ordnungsnorm, besitzen eine reichhaltige Idealstruktur. Insbesondere ist hier jedes vollperfekte Ideal Durchschnitt von maximalen, vollperfekten Idealen. In (2.4) und (2.5) untersuchen wir dann den Positivteil der vollperfekten Ideale. Schließlich wenden wir die allgemeinen Ergebnisse auf C^*- Algebren und Simplexräume an und bekommen die von Effros |11,12| und Prosser |22| bewiesenen, spezifischen Eigenschaften der vollperfekten Ideale in diesen Räumen.

3. Für einen (A)-Funktionenraum E können wir auf der Menge X der Extremalpunkte der positiven Facette Topologien untersuchen, für die der Verband der abgeschlossenen Mengen antiisomorph zu einem Verband von vollperfekten Idealen ist. Jede solche Strukturtopologie ω ist quasikompakt. In (3.3) geben wir dann eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, daß der Raum der ω-stetigen, reellwertigen Funktionen

auf X ein Teilraum von E ist. In Simplexräumen existiert eine feinste Strukturtopologie s auf X. Damit können wir ein von Effros |13| gestelltes Problem lösen: $C(X_s)$ ist der größte Unterverband in E, der die Konstanten enthält (3.5).

4. Im Anschluß an die Arbeiten von Schaefer über invariante Ideale in C(X) |24,25| untersuchen wir für einen positiven Endomorphismus T eines geordneten Banachraumes, dessen Kegel einen inneren Punkt besitzt, die T-invarianten, vollperfekten Ideale. Dabei können wir einige Sätze über die Darstellung der maximalen *T-Ideale* beweisen und die Frage nach der Quasinilpotenz eines *irreduziblen* Operators beantworten.

5. Für (A)-Funktionenräume bestimmen wir die zum Begriff des vollperfekten Ideals gehörenden Homomorphismen - *vollperfekte Markov-Operatoren* -, die im Vektorverband mit den Markov-Verbandshomomorphismen zusammenfallen. Insbesondere untersuchen wir den Fall der Operatoren in Simplexräumen. Dabei können wir einen Satz von Jellett |16| etwas verallgemeinern und ein Banach-Stone-Theorem für Simplexräume beweisen (5.5).

6. Für das Spektrum von positiven Operatoren in (A)-Funktionenräumen gilt nur: $r(T) \in \sigma(T)$. Deshalb beschränken wir uns auf Simplexräume, wo wir zeigen können, daß das periphere Spektrum eines Markov-Operators zyklisch ist. Ein vollperfekter Markov-Operator T besitzt ein zyklisches *zentrales Punktspektrum* $P\sigma_Z(T)$ und für gewisse Eigenwerte λ gilt: $\lambda \cdot P\sigma_Z(T) \subset P_\sigma(T)$.

Herrn Prof. Dr. H.H. Schaefer möchte ich für seine Anregungen, sein Interesse und seine Geduld ganz herzlich danken. Ebenso gilt mein Dank für viele fruchtbare und hilfreiche Diskussionen Herrn Prof. T. Ando, Herrn Dr. H. Lotz und all meinen Kollegen.

§ 0 Vorbemerkungen

In aller Kürze sollen hier einige, für diese Arbeit wichtige Begriffe geklärt werden. Zunächst ist E immer ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Wir sprechen von einem *geordneten Vektorraum*, wenn in E ein Kegel K mit $K \cap (-K) = (0)$ ausgezeichnet ist. Ist E außerdem ein lokalkonvexer Raum (lkR) mit einer Nullumgebungsbasis $\mathcal{U}$, so heißt $(E, \mathcal{U}, K)$ ein *geordneter lokalkonvexer Raum* (glkR).

Sei E ein lkR. Wenn nicht anders erwähnt, betrachten wir E' immer als lkR mit der Topologie $\sigma(E',E)$. Für eine Teilmenge A in E ist die Polare $A^\circ = \{x' \in E' : \langle x,x' \rangle \leq 1 \text{ für alle } x \in A\}$. Für $B \subset E'$ bezeichnen wir die Polare bezüglich $\langle E',E \rangle$ mit B°, bezüglich $\langle E',E'' \rangle$ mit $B^\bullet$. Wenn F ein Teilraum von E ist, dann sei $\hat{A}$ das kanonische Bild von A in $\hat{E} = E/F$. Alle weiteren Definitionen und Schreibweisen beziehen sich, sofern nicht anders angegeben, auf Schaefer |23| und Bauer |3|. Dagegen sollen noch einige bekannte Definitionen zur Idealtheorie in geordneten Vektorräumen zusammengestellt werden.

(0.1) Definition (Kadison|17|, u.a.): Ein linearer Teilraum I eines geordneten Vektorraumes E mit dem Kegel K heißt ein (Ordnungs-) *Ideal*, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

(a) Für alle $x \in I$ gilt: $[0,x] = \{z \in E : 0 \leq z \leq x\} \subset I$.

(b) Für alle $x,y \in I$ gilt: $[x,y] \subset I$, d.h. $I = (I+K) \cap (I-K) = [I]$.

(c) $I \cap K$ ist extremal in K, d.h. wenn für $x \in I \cap K$ und $0 < \lambda < 1$ $x = x_1 + (1-\lambda)x_2$ mit $x_1, x_2 \in K$ gilt, dann ist $x_1, x_2 \in I$.

(d) $\hat{E} = E/I$ ist mit dem Kegel $\hat{K}$ ein geordneter Vektorraum.

(e) I ist Kern eines positiven Operators von E in einen geordneten Vektorraum F.

Bemerkung: Genau dann ist I ein maximales Ideal in E, wenn $I = f^{-1}(0)$ für eine positive Linearform f gilt. Außerdem ist jeder Teilraum J von E mit $J \cap K = (0)$ ein Ideal.

(0.2) Definition (Effros|12|, u.a.): Ein Teilraum A in einem geordneten Vektorraum E heißt *positiv-erzeugt*, wenn $A = A^+ - A^+$ für $A^+ = A \cap K$ gilt.

(0.3) Definition (Ellis|15|): Ein Teilraum in einem glkR $(E, \mathcal{U}, K)$ heißt *perfekt*, wenn es zu jeder Nullumgebung $U \in \mathcal{U}$ und zu jedem $x \in A$ ein $y \in A$ und $\mu, \nu \in U$ gibt, so daß $-\mu - y \leq x \leq \nu + y$ gilt.

§ 1 Vollperfekte Ideale

In diesem Paragraphen verfolgen wir das Ziel, in beliebigen glkR Ideale auszuzeichnen, die in lokalkonvexen Vektorverbänden (lkVV) mit den abgeschlossenen Verbandsidealen zusammenfallen und im allgemeinen Fall möglichst viele Eigenschaften der Verbandsideale besitzen. Dazu werden wir die Verbandsoperationen durch vermehrtes Ausnutzen der Topologie ersetzen. Zunächst untersuchen wir in (1.1) bis (1.3) eine Hüllenoperation, die Topologie und Ordnung eng verknüpft. Die Definition der *vollperfekten* Ideale in (1.4) verbindet dann die Bedingungen *perfekt* (0.3) und *voll* (1.1). Nach elementaren Eigenschaften vollperfekter Ideale folgt in (1.8), Korollar 1, die wichtige duale Charakterisierung unseres Idealbegriffs. In (1.9) schließlich untersuchen wir den Positivteil $I \cap K$ von vollperfekten Idealen I.

(1.1) Im folgenden sei $(E, \mathcal{U}, K)$, kurz E, ein glkR.

Definition: Für einen Teilraum A in E sei $\underline{G}(A) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} [A + U]$. Wenn $A = \underline{G}(A)$ ist, dann ist A ein *volles Ideal*.

Lemma: *Es gilt* $\bar{A} \subset \underline{G}(A) = \underline{G}(\bar{A}) = \overline{\underline{G}(A)} = \underline{G}(\underline{G}(A))$.

Bemerkung: $\underline{G}(A)$ ist immer ein (abgeschlossenes) volles Ideal. Außerdem ist jedes volle Ideal wegen $A \subset [A] \subset \underline{G}(A)$ ein Ideal (0.1) .

(1.2) Satz: *Ein Teilraum A in E ist genau dann ein volles Ideal, wenn* $(\hat{E} = E/A, [\hat{\mathcal{U}}], \hat{K})$ *ein glkR ist.*

Beweis: Da $A \subset \underline{G}(A)$ gilt, ist $\widehat{\underline{G}(A)} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \widehat{[A+U]} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} [\widehat{A+U}] = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} [\hat{U}]$. Also ist $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} [\hat{U}] = (\hat{o})$, genau wenn $A = \underline{G}(A)$ ist. Die übrigen Eigenschaften eines glkR erfüllt $\hat{E}$ immer.

Bemerkung: $\hat{K}$ ist normal bezüglich $[\hat{\mathcal{U}}]$. Daraus folgt für $A = \underline{G}(A)$: $(\hat{E}, [\hat{\mathcal{U}}])' = A^{\circ} \cap K' - A^{\circ} \cap K'$, und $\bar{\hat{K}}$ ist ein echter Kegel in $(\hat{E}, [\hat{\mathcal{U}}])$.

(1.3) Satz: *Für jeden Teilraum A in E ist* $\underline{G}(A)$ *der Durchschnitt der maximalen, abgeschlossenen Ideale, die A enthalten:* $\underline{G}(A) = (A^{\circ} \cap K' - A^{\circ} \cap K')^{\circ}$.

Beweis: Für $x' \in A^{\circ} \cap K'$ ist $\underline{G}(A) \subset x'^{-1}(o)$. Also gilt: $\underline{G}(A) \subset (A^{\circ} \cap K' - A^{\circ} \cap K')^{\circ}$. Um die umgekehrte Inklusion zu beweisen, zeigen wir, daß $A^{\circ} \cap K' - A^{\circ} \cap K'$ $\sigma(E',E)$-dicht in $(\underline{G}(A))^{\circ}$ ist. Nach (1.1) ist $\underline{G}(A)$ ein volles Ideal. Für $\hat{E} = E/\underline{G}(A)$ ist dann $(\hat{E}, \hat{\mathcal{U}})' = (\underline{G}(A))^{\circ}$ und wegen (1.2) $(\hat{E}, [\hat{\mathcal{U}}])' =: F'$, wobei $F' = (\underline{G}(A))^{\circ} \cap K' - (\underline{G}(A))^{\circ} \cap K'$ ist. Weil F' den Raum $\hat{E}$ separiert, folgt: F' ist $\sigma((\underline{G}(A))^{\circ}, \hat{E})$-dicht in $(\underline{G}(A))^{\circ}$, also nach (|23|, IV, 4.1, cor 1) auch $\sigma(E',E)$-dicht. Wegen $A \subset \underline{G}(A)$, bzw. $A^{\circ} \supset (\underline{G}(A))^{\circ}$ folgt die Behauptung.

(1.4) Definition: Für einen Teilraum A in E sei $\underline{H}_{\mathcal{U},K}(A) = \underline{H}(A) = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} [(A + U) \cap (K + U) - (A + U) \cap (K + U)]$. Wenn $A = \underline{H}(A)$ ist, dann ist A ein *vollperfektes Ideal*.

Bemerkung: Man überlegt sich leicht, daß gilt:
$\underline{H}(A) = \{x \in E: \forall U \in \mathcal{U},\ \exists \mu, \nu \in U \text{ und } y \in A \text{ mit } -\mu y \leq x \leq \nu y\}$.
$\underline{H}(A)$ ist also der Teilraum aller $x \in E$, so daß es für $\pm x$ "fast" eine Majorante $y \in A$ gibt, und ein vollperfektes Ideal (vp-Ideal) ist in diesem Sinne "fast" positiv-erzeugt.

Lemma: *Für $A \subset \underline{H}(A)$ gilt:* $\underline{H}(A) = \underline{H}(\overline{A}) = \overline{\underline{H}(A)} = \underline{H}(\underline{H}(A)) = \underline{G}(A)$

Beweis: Es gilt immer $\underline{H}(\underline{H}(A)) \subset \underline{H}(A)$. Wegen $A \subset \underline{H}(A)$ folgt also $\underline{H}(A) = \underline{H}(\underline{H}(A))$. Für $A \subset \underline{H}(A)$ gilt außerdem $\underline{G}(A) \subset \underline{G}(\underline{H}(A)) = \underline{H}(A) \subset \underline{G}(A)$. Damit ist $\underline{G}(A) = \underline{H}(A)$ bewiesen. Die restlichen Gleichungen sind trivial.

(1.5) Lemma: *Für jeden Teilraum A in E gilt:*
$\underline{H}_{\mathcal{U},K}(A) = \underline{H}_{[\mathcal{U}],K}(A) = \underline{H}_{\mathcal{U},\overline{K}}(A) = \underline{H}_{[\mathcal{U}],\overline{K}}(A)$.

Beweis: Es gilt für jedes $U \in \mathcal{U}$:
$[(A+U) \cap (K+U) - (A+U) \cap (K+U)] \subset$
$\subset [(A+[U]) \cap (\overline{K}+[U]) - (A+[U]) \cap (\overline{K}+[U])]$
$\subset [(A+2U) \cap (K+2U) - (A+2U) \cap (K+2U)]$, woraus die Behauptung folgt.

Satz: *Die Menge der vp-Ideale in E ist durch eine lokalkonvexe Topologie auf E und einen abgeschlossenen, normalen Kegel in E charakterisiert.*

Beweis: K ist normal bezüglich $[\mathcal{U}]$, also ist auch die Abschließung $\overline{K}$ (bezüglich $[\mathcal{U}]$) normal. Die Behauptung folgt nun aus dem Lemma.

(1.6) Satz: *Sei J ein vp-Ideal in E und sei* $\hat{E} = E/J$. *Dann gibt es eine eineindeutige Beziehung zwischen den vp-Idealen in* $(\hat{E}, \hat{\mathcal{U}}, \hat{K})$ *und den vp-Idealen in* $(E, \mathcal{U}, K)$, *die J enthalten.*

Beweis: Mit Hilfe der Bemerkung nach Definition (1.4) prüft man leicht nach, daß für $J = \underline{H}(J)$ und für einen Teilraum I in E mit $J \subset I$ gilt: $\hat{I} = \underline{H}_{\hat{\mathcal{U}},\hat{K}}(\hat{I})$, genau wenn $I = \underline{H}_{\mathcal{U},K}(I)$. Daraus folgt dann die Behauptung.

Korollar: $(\hat{E}, [\hat{\mathcal{U}}], \hat{K})$ *ist ein glkR mit normalem, abgeschlossenem Kegel und besitzt die gleichen vp-Ideale wie* $(\hat{E}, \hat{\mathcal{U}}, \hat{K})$.

Beweis: J ist nach (1.4), Lemma, ein volles Ideal. Also folgt der erste Teil der Behauptung aus (1.2). Der zweite Teil gilt wegen (1.5).

(1.7) Satz: *Seien* I, I_γ *für* $\gamma \in \Gamma$ *vp-Ideale in E. Dann gelten die folgenden Eigenschaften:*

(i) I ist Durchschnitt der maximalen, abgeschlossenen Ideale, die I enthalten.

(ii) $\bigcap_{U \in \mathcal{U}} [U] = \underline{H}(0) \subset I \subset \overline{K - K}$.

(iii) $\underline{H}(\sum_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma)$ *ist ein vp-Ideal.*

Beweis: (i) folgt aus $I = \underline{H}(I) = \underline{G}(I)$ und (1.3). (ii) ist trivial, und wegen $\sum_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \underline{H}(I_\gamma) \subset \underline{H}(\sum_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma)$ und Lemma (1.4) folgt (iii) .

(1.8) Der folgende Satz führt zu einer dualen Charakterisierung der vp-Ideale und wurde zuerst von Bonsall [5] für

maximale Ideale in Räumen mit Ordnungseinheit bewiesen und dann von Ellis |14,15| für beliebige Ideale in glkR mit normalem oder 'strikt erzeugendem' Kegel verallgemeinert. Mit unserer Beweismethode gelingt es nun, den Satz ohne einschränkende Voraussetzungen und ungleich einfacher zu beweisen.

Satz: *Sei A ein Teilraum in E. Genau dann gilt* $A \subset \underline{H}(A)$, *wenn* A° *ein Ideal in E' ist.*

Beweis: Weil $A^\circ = (\bar{A})^\circ$ und $\underline{H}(A) = \underline{H}(\bar{A})$ ist, können wir A als abgeschlossen voraussetzen. Außerdem sei $\mathcal{U}$ eine Nullumgebungsbasis von abgeschlossenen, absolutkonvexen Nullumgebungen, und K sei (wegen (1.5)) ein abgeschlossener Kegel. Zunächst sind die beiden folgenden Äquivalenzen leicht einzusehen:

(i) $A \subset \underline{H}(A) \iff A \subset \overline{A \cap (K+U) - A \cap (K+U)}$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

(ii) A° ist Ideal in E' $\iff A^\circ \supset (A^\circ + K' \cap U^\circ) \cap (A^\circ - K' \cap U^\circ)$ für alle

Wir zeigen nun die Äquivalenz von (i) und (ii) durch Polarenbildung bezüglich der Dualität von $\langle E, E' \rangle$. Dazu sei an die folgenden Eigenschaften erinnert:

Sind M,N abgeschlossene, konvexe Teilmengen in E (oder E'_σ) mit $0 \in M, N$, so gilt:

(a) $(M + N)^\circ \supset \frac{1}{2}(M^\circ \cap N^\circ)$, (b) $(M \cap N)^\circ \supset \frac{1}{2}(M^\circ + N^\circ)$,

(c) $(M + N)^\circ \subset M^\circ \cap N^\circ$, (d) $(M \cap N)^\circ \subset \overline{(M^\circ + N^\circ)}$.

Damit beweisen wir nun:

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Sei $A \subset \overline{A\cap(K+U)} - A\cap(K+U)$ für ein $U\in\mathcal{U}$. Dann ist

$$A^\circ \supset (A\cap(K+2U))^\circ \cap (A\cap(-K+2U))^\circ \quad \text{(wegen (a))},$$

$$\supset (A^\circ+K^\circ\cap(8U)^\circ) \cap (A^\circ+(-K)^\circ\cap(8U)^\circ), \quad \text{((a),(b))},$$

$$= (A^\circ-K'\cap\tfrac{1}{8}U^\circ) \cap (A^\circ+K'\cap\tfrac{1}{8}U^\circ) \text{ , was zu zeigen war.}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Sei $A^\circ \supset (A^\circ+K'\cap U^\circ) \cap (A^\circ-K'\cap U^\circ)$ für ein $U\in\mathcal{U}$. Dann ist $A=A^{\circ\circ} \subset \overline{(A^\circ+K'\cap U^\circ)^\circ + (A^\circ-K'\cap U^\circ)^\circ}$, (wegen (d)),

$$\subset \overline{A\cap(K'\cap U^\circ)^\circ + A\cap(-K'\cap U^\circ)^\circ}, \quad \text{(wegen (c))},$$

$$\subset \overline{A\cap(K+2U)} - A\cap(K+2U) \text{ , (wegen (d))},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Bemerkung: Behauptung und Beweis sind auch für beliebige Kegel in einem lkR gültig.

Korollar 1: Sei I ein abgeschlossenes Ideal in E. Dann besteht eine **eineindeutige** Beziehung zwischen den vp-Idealen I und den extremalen Teilmengen $I^\circ\cap K'$ des positiven Kegels K' in E'.

Beweis: Aus dem Satz und aus (1.7) folgt: I ist genau dann ein vp-Ideal, wenn $I^\circ = \overline{I^\circ\cap K'} - I^\circ\cap K'$ ist, wobei wegen (0.1) $I^\circ\cap K'$ extremal in K' ist. Diese Beziehung ist eineindeutig.

Korollar 2: Ein Ideal *I ist genau dann vollperfekt in (E,𝒰,K), wenn I für eine (und damit für jede) mit der Dualität <E,E'> verträgliche Topologie vollperfekt ist.*

Korollar 3: Ein Ideal *I ist genau dann vollperfekt in E, wenn $\bar{I}$ in der Vervollständigung $\tilde{E}$ vollperfekt ist.*

Korollar 4: *Ein Ideal I ist genau dann vollperfekt in E, wenn die Bipolare $I^{o\bullet}$ ein vp-Ideal in $(E'',\sigma(E'',E'))$ ist.*

(1.9) Von besonderem Interesse ist der Positivteil $I^+ = I \cap K$ eines Ideals I in E. Wenn I ein vp-Ideal ist, dann ist I^{o+} $\sigma(E',E)$-total in I^o. Also ist $\underline{H}_\sigma(I^o)$ ein vp-Ideal in E'_σ. Setzen wir K wegen (1.5) als abgeschlossen voraus, so ist $(E'_\sigma,K')' = (E,K)$. Weil $I^{oo} = I$ ist, gilt also $(\underline{H}_\sigma(I^o))^o = \overline{I^+ - I^+}$, womit der folgende Satz bewiesen ist.

Satz: *Sei I ein abgeschlossener Teilraum in E, und sei K abgeschlossen. Genau dann ist I ein vp-Ideal mit einem in I totalen Positivteil, wenn I^o ein vp-Ideal in E'_σ und I^{o+} σ-total in I^o ist.*

Bemerkung: (2.4) zeigt, daß es sogar in ziemlich speziellen Räumen vp-Ideale mit trivialem Positivteil gibt. In (2.7) behandeln wir dann Räume, in denen jedes vp-Ideal positiv-erzeugt ist und deren Dual ein Verband ist. Dafür kann man mit obigem Satz zeigen, daß die vp-Ideale im schwachen Dual gerade die schwach-abgeschlossenen Verbandsideale sind und umgekehrt.

(1.10) Beispiel 1: Ist E ein lkVV, so gilt: Ein Teilraum I von E ist genau dann ein vp-Ideal, wenn I ein abgeschlossenes Verbandsideal ist.

Beispiel 2: Sei $E = C_n(X)$ der Raum aller n-mal stetig-differenzierbaren Funktionen auf einer kompakten Menge $X \subset \mathbb{R}$

mit $||f|| = ||f||_n = \max\{||f^{(i)}||_\infty : i=0,1,\ldots,n\}$ für $f \in E$. Dann ist $(E, ||\cdot||)$ unter der natürlichen Ordnung ein geordneter Banachraum, und es gilt: Für jede abgeschlossene Teilmenge $S \subset X$ ist $I_S = \{f \in E : f(S) = 0\}$ ein vollperfektes Ideal, und jedes vp-Ideal in E läßt sich so darstellen.

§ 2 Vollperfekte Ideale in (A)-Funktionenräumen

Archimedisch geordnete Banachräume mit Ordnungseinheit besitzen eine besonders reichhaltige Idealstruktur, die wir in diesem Paragraphen untersuchen. Die wesentliche Eigenschaft ist die Existenz maximaler vp-Ideale und ihre Beziehung zu den Extremalpunkten der positiven Facette. Neben weiteren Anwendungen der allgemeinen Theorie von § 1 werden C^*-Algebren und Simplexräume gesondert behandelt.

(2.1) Im folgenden sei (E,p_e,e), kurz E, ein archimedisch geordneter Banachraum mit Ordnungseinheit e und Ordnungsnorm $||f|| = p_e(f) = \inf\{\lambda > 0: -\lambda e \leq f \leq \lambda e\}$ für $f \in E$. Weil E archimedisch geordnet ist, folgt $\bigcap_{\lambda>0} \lambda[-e,e] = (0)$ und $K = \{f \in E: -\lambda f \leq e \text{ für alle } \lambda > 0\}$. Man überlegt sich leicht, daß für $A \subset E$ gilt: $\underline{H}(A) = \{f \in E: \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, g \in A \text{ mit } \pm f \leq \varepsilon e + g\}$.

Lemma 1 (Kadison|17|, u.a.): *(E,p_e,e) ist ordnungs- und normisomorph zum Raum $E(C)$ aller stetigen, affinen Funktionen auf einer kompakten, konvexen Menge C mit der Supremumsnorm.*

Wir wählen im folgenden für C immer die positive Facette $C = C_E = \{0 \leq \phi \in E': \phi(e)=1\}$ von E mit der von $\sigma(E',E)$ induzierten Topologie. Weil C nach Krein-Milman die abgeschlossene, konvexe Hülle der Menge der Extremalpunkte $X = X_E$ von C ist, folgt daraus weiter

Lemma 2: *(E,p_e,e) ist ordnungs- und normisomorph zu einem abgeschlossenem Teilraum $E(X)$ des Raumes $C_b(X)$ der beschränkten, stetigen, reellen Funktionen auf der präkompakten Menge X.*

Auf Grund dieser Darstellung nennen wir die Räume (E,p_e,e) *(A)-Funktionenräume*.

(2.2) Beispiel 1: Sei F ein beliebiger Banachraum mit Einheitskugel U. Dann ist $E = F \oplus \mathbb{R}$ mit dem Kegel $K = \{(f,r): r \geq ||f|| \text{ für } f \in E \text{ und } r \in \mathbb{R}\}$ und der Ordnungseinheit $e = (0,1)$ ein (A)-Funktionenraum. Dabei induziert p_e auf F die ursprüngliche Norm, $C = \{(\phi,1): \phi \in U^o\}$ ist die positive Facette von E und $X = \{(\phi,1): \phi = o \text{ oder } \phi \text{ Extremalpunkt von } U^o\}$ die Menge ihrer Extremalpunkte.

Beispiel 2: Sei Ω ein relativkompaktes Gebiet des $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 1$, und sei E der Raum aller auf $\bar{\Omega}$ stetigen, in Ω harmonischen reellen Funktionen. Mit der Supremumsnorm und der natürlichen Ordnung ist E ein (A)-Funktionenraum, und man kann zeigen, daß die Extremalpunktmenge der positiven Facette von E die Menge der 'regulären' Randpunkte von $\bar{\Omega}$ ist (Bauer|2|).

Sei z.B. Ω das Gebiet des $\mathbb{R}^3$, das von einer Kugel um O und der Fläche begrenzt wird, die durch Rotation um die x-Achse der Kurve $y = \exp(-\frac{1}{x})$ für $x>o$ erzeugt wird. Hierfür sind alle Punkte des topologischen Randes außer O regulär (Kellogg |18|).

(2.3) Satz: *Sei E ein (A)-Funktionenraum. Dann ist jedes vp-Ideal in E Durchschnitt der maximalen vp-Ideale, die es enthalten.*

Beweis: Sei I ein vp-Ideal in E. Dann ist nach (1.8), Korollar 1, $I = \bigcap_{\phi \in I^\circ \cap K'} \phi^{-1}(0) = \bigcap_{\phi \in I^\circ \cap C} \phi^{-1}(0)$. $I^\circ \cap C$ ist σ-kompakt und konvex. Sei nun X_I die Extremalpunktmenge von $I^\circ \cap C$. Dann gilt nach Krein-Milman $I = \bigcap_{\phi \in X_I} \phi^{-1}(0)$. Weil I vollperfekt ist, folgt wieder aus (1.8), daß I° ein Ideal in E' ist. Wegen (0.1) ist dann $I^\circ \cap K'$ extremal in K', also auch $I^\circ \cap C$ extremal in C. Daraus folgt, daß jeder Extremalpunkt von $I^\circ \cap C$ auch Extremalpunkt von C ist. Also gilt $X_I = I^\circ \cap X$ und $I = \bigcap_{\phi \in I^\circ \cap X} \phi^{-1}(0)$. Aus $\phi \in X$ folgt aber, daß $\{\lambda\phi: \lambda \in \mathbb{R}\}$ ein Ideal in E' ist. Damit ist klar, daß $\phi^{-1}(0)$ für $\phi \in I^\circ \cap X$ ein maximales vp-Ideal ist, das I enthält.

Korollar 1: *Sei $E \neq \mathbb{R}$ und $f \in E$, $f \neq 0$. Dann gibt es ein maximales vp-Ideal $I \neq (0)$ mit $f \notin I$.*

Definition: Sei I ein vp-Ideal in E. Dann heißt $S_I = \{x \in X: f(x) = 0 \text{ für alle } f \in I\} = I^\circ \cap X$ ein *Träger*.

Korollar 2: *Es besteht eine eineindeutige Beziehung zwischen den vp-Idealen in E und den Trägern in X. Insbesondere entsprechen die maximalen vp-Ideale eineindeutig den Extremalpunkten $x \in X$ von C.*

Bemerkung: Es ist klar, daß jeder Träger σ-abgeschlossen in X ist. Aus (1.7.iii) folgt, daß der Durchschnitt beliebig vieler Träger wieder ein Träger ist.

(2.4) Wir stellen nun die Frage, ob in (A)-Funktionenräumen jedes maximale vp-Ideal einen nicht-trivialen Positivteil hat. Oder: gibt es einen (A)-Funktionenraum E und ein strikt positives $\phi \in E'$, das Extremalpunkt der positiven Facette ist? Wegen (2.2), Beispiel 1, ist dies äquivalent mit der Frage: gibt es einen Banachraum F mit Einheitskugel U und ein $\phi \in E'$ mit $||\phi|| = 1$ und $|\langle \phi, f \rangle| < 1$ für alle $f \in U$, wobei ϕ Extremalpunkt von U° ist? Das folgende Beispiel, das ich Herrn Prof. T. Ando verdanke, erfüllt diese Bedingungen, d.h. es gibt (A)-Funktionenräume und maximale vp-Ideale mit trivialem Positivteil:

Sei $F = C([0,1])$ mit $||f|| = ||f||_\infty + ||f||_1$, und $\phi \in F'$ sei definiert durch $\langle \phi, f \rangle = f(0) + \int_0 f(t) g_0(t) dt$, wobei

$$g_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{1}{2n} < t \leq \frac{1}{2n-1} \\ -1 & \text{für } \frac{1}{2n+1} < t \leq \frac{1}{2n} \end{cases}$$ ist für $t \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$.

(2.5) Satz: *Sei $E \neq R$ ein (A)-Funktionenraum, und sei $f \in E$, $f \neq 0$. Dann gibt es ein vp-Ideal $I \neq (0)$ mit $f \notin I$ und $I = \underline{H}(I^+ - I^+)$.*

Beweis: Sei I ein maximales vp-Ideal in E mit $f \notin I$. Dann ist $J = \underline{H}(I^+ - I^+)$ ein vp-Ideal mit $f \notin J$. Es genügt also, die maximalen vp-Ideale mit nicht-trivialem Positivteil zu betrachten. Wir zeigen deshalb, daß $Y = \{\phi \in X_E : \phi^{-1}(0) \cap K \neq (0)\}$

$\sigma(E',E)$-dicht in X_E ist. Y läßt sich nun auch als die Menge der $\phi \in X_E$ charakterisieren, für die es ein Element $f \in E$ gibt, das auf ϕ sein Maximum (als Funktion auf C) annimmt und für das $f \neq e$ und $||f|| = 1$ gilt. Denn dafür ist $\phi^{-1}(0)$ ein maximales vp-Ideal mit $0 < e-f = g \in \phi^{-1}(0)$. Die Abschließung von Y in C (bezüglich $\sigma(E',E)$) enthält also den Schilovrand Σ des Raumes E. Da nach (|3|,5.1.5) $\Sigma = \overline{X}$ ist, gilt $\overline{Y} \subset \overline{X} = \Sigma \subset \overline{Y}$. Also ist gezeigt, daß Y $\sigma(E',E)$-dicht in X ist.

(2.6) Als spezielle (A)-Funktionenräume untersuchen wir zunächst C^*-Algebren: eine C^*-Algebra A ist eine Banachalgebra über $\mathbb{C}$ mit Einselement e und Involution $x \to x^*$, so daß für alle $x \in A$ $||x^*x|| = ||x^*|| \cdot ||x||$ gilt. Jede solche Algebra läßt sich darstellen als eine selbstadjungierte Algebra von Operatoren in einem Hilbertraum |9|. Sei E der Teilraum aller hermiteschen Elemente $(x^* = x)$ von A. Dann ist $A = E + iE$, und E ist bezüglich des Kegels $K = \{x \in E: x = y^2$ für ein $y \in E\}$, der Ordnungseinheit e und der induzierten Norm ein (A)-Funktionenraum (über $\mathbb{R}$). Insbesondere kann E' mit dem Raum der hermiteschen Linearformen $(\phi(x^*) = \overline{\phi(x)})$ auf A und K' mit den positiven Linearformen $(\phi(x^*x) \geq 0)$ auf A identifiziert werden. Die Ordnungsstruktur von C^*-Algebren wurde besonders von Effros |11|, Prosser|22| und Størmer|27| untersucht.

Sei nun A eine C^*-Algebra. Für ϕ aus der positiven Facette C von E ist $N_\phi = \{x \in A: \phi(x^*x) = 0\}$ genau dann ein maximales Linksideal, wenn ϕ Extremalpunkt von C ist (|9|, 2.9.5), d.h. wenn $I_\phi = \{x \in E: \phi(x) = 0\}$ ein maximales vp-Ideal in E ist.

Wir bezeichnen nun die vp-Ideale in E als die vp-Ideale der C^*-Algebra A. Damit folgt aus (|22|, 4.9, 5.11) und (1.8) der

Satz: *In einer C^*-Algebra A besteht zwischen den vp-Idealen I und den abgeschlossenen Linksidealen N folgende eineindeutige Beziehung:* $I^+ = N \cap K$ *und* $N = \overline{A \cdot I^+} = \{x \in A: x^*x \in I^+\} = \{x \in A: \phi(x^*x) = 0 \text{ für alle } \phi \in I^o \cap C\}$.

Korollar: *Für jedes vp-Ideal I in einer C^*-Algebra gilt:* $I = H(I^+ - I^+)$.

Beispiel: Die hermiteschen Elemente eines abgeschlossenen, zweiseitigen Ideals einer C^*-Algebra bilden ein vp-Ideal, das sogar positiv-erzeugt ist |27|.

(2.7) Die C^*-Algebren verallgemeinern die algebraische Struktur der Räume vom Typ C(X). Jetzt untersuchen wir eine Verallgemeinerung der Vektorverbandseigenschaften von C(X).

Definition: Ein (A)-Funktionenraum (E, p_e, e), kurz E, heißt *Simplexraum*, wenn er eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt (Edwards|10|):

(a) E hat die Zerlegungseigenschaft [Z]: für alle $0 \leq x, y \in E$ ist $[0,x] + [0,y] = [0,x+y]$.

(b) E hat die Interpolationseigenschaft [Z']: für $x_1, x_2, y_1, y_2 \in E$ mit $x_i \leq y_k$, $(i,k = 1,2)$, gibt es ein $z \in E$ mit $x_i \leq z \leq y_k$.

(c) Die positive Facette C von E ist ein Simplex.

(d) E' ist ein (AL)-Raum.

Die Idealstruktur der Simplexräume wurde (etwas allgemeiner) von Effros|12| und Davies|8| untersucht. Wir wollen hier die spezifischen Eigenschaften der vp-Ideale in diesen Räumen mit Hilfe der Edward'schen " $\frac{1}{2^n}$ -Technik " entwickeln |10|.

Satz: *In einem Simplexraum ist ein Ideal genau dann vollperfekt, wenn es abgeschlossen und positiv-erzeugt ist.*

Beweis: Sei $x \in I = \underline{H}(I)$. Es ist zu zeigen, daß es ein $y \in I$ mit $\pm x \leq y$ gibt. Dazu konstruieren wir eine Folge $(y_n) \subset E$, die folgende Eigenschaften besitzt: (a) $\|y_{n+1}-y_n\| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, und (b) $\pm x \leq y_n \leq z_n + \frac{e}{2^n}$ für ein $z_n \in I$ und $n \in \mathbb{N}$. Der Induktionsanfang ist trivial. Für ein $n \in \mathbb{N}$ sollen nun $y_1, \ldots, y_n$ die Eigenschaften (a) und (b) erfüllen. Weil I vollperfekt ist und (b) gilt, gibt es ein $z_{n+1} \in I$, das folgende Bedingungen erfüllt: $\pm x \leq z_{n+1} + \frac{e}{2^{n+1}}$ und $z_n \leq z_{n+1} + \frac{e}{2^{n+1}}$. Wir schreiben dafür: $\pm x, z_n \leq z_{n+1} + \frac{e}{2^{n+1}}$. Also gilt auch $\pm x, y_n - \frac{e}{2^n} \leq y_n + \frac{e}{2^n} \leq z_{n+1} + \frac{e}{2^{n+1}}$. Auf Grund der Interpolationseigenschaft [Z'] können wir nun ein $y_{n+1} \in E$ so wählen, daß (a) und (b) erfüllt sind. Wegen (a) konvergiert die Folge (y_n) gegen ein $y \in E$, für das wegen (b) $\pm x \leq y$ gilt. Außerdem folgt aus (b), daß jede positive Linearform auf E, die auf I verschwindet, auch auf y den Wert Null annimmt. Also gilt $y \in \underline{H}(I) = I$, was zu zeigen war.

Sei nun umgekehrt $I = I^+ - I^+$ ein abgeschlossenes Ideal. Dann ist $J = \underline{H}(I)$ vollperfekt, also positiv-erzeugt. Für $0 < y$ gibt es $y_n \in I^+$ mit $y \leq y_n + \frac{e}{n}$. Also ist wegen [Z]: $y \in \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_{y_n}} \subset \overline{I} = I$, wobei E_{y_n} das von y_n in E erzeugte Ideal ist. Damit ist gezeigt, daß $J = \underline{H}(I) = I$ ein vp-Ideal ist.

Korollar 1: *In einem Simplexraum ist der Durchschnitt von zwei vp-Idealen wieder vollperfekt.*

Beweis: Seien I,J vp-Ideale in dem Simplexraum E. $I \cap J$ ist ein volles Ideal. Also genügt es zu zeigen, daß $I \cap J \subset \underline{H}(I \cap J)$ gilt. Sei $x \in I \cap J$. Dann gibt es $y_1 \in I^+$ und $y_2 \in J^+$ mit $\pm x \leq y_1, y_2$. Wegen [Z'] existiert also ein $z \in I \cap J$ mit $\pm x \leq z$, d.h. $I \cap J$ ist positiv-erzeugt. Daraus folgt $I \cap J \subset \underline{H}(I \cap J)$.

Korollar 2: *In einem Simplexraum ist die Summe von zwei vp-Idealen wieder vollperfekt.*

Beweis: Seien I,J vp-Ideale in dem Simplexraum E. Dann ist $I + J$ positiv-erzeugt und wegen [Z] ein Ideal. Es ist also nur noch zu zeigen, daß $I + J$ abgeschlossen ist. Sei dazu $x \in \overline{I+J}$. Dann gibt es $u \in I^+$ und $v \in J^+$, so daß $\pm x \leq ||x||e,u+v$ gilt. Wegen [Z'] existiert ein $y \in E$ mit $\pm x \leq y \leq ||x||e,u+v$. Dieses y kann wegen [Z] zerlegt werden in $y = u_1 + v_1$ mit $0 \leq u_1 \leq u$, $0 \leq v_1 \leq v$, $||u_1|| \leq ||u||$ und $||v_1|| \leq ||v||$. Wieder wegen [Z] folgt daraus, daß es für $x \in I+J$ eine Zerlegung $x = x_1 + x_2$ gibt mit $x_1 \in I$, $x_2 \in J$ und $||x_1||, ||x_2|| \leq 3||x||$.

Sei nun $x \in \overline{I+J}$, d.h. $x = \sum_n x_n$ mit $x_n \in I+J$ und $\sum_n ||x_n|| < \infty$. Auf Grund obiger Überlegung kann man x_n zerlegen in $x_n = y_n + z_n$, wobei $\sum_n y_n$ gegen $y \in I$ und $\sum_n z_n$ gegen $z \in J$ konvergiert. Also ist $x = y + z \in I+J$, was zu zeigen war.

(2.8) Bemerkung: Die Ergebnisse von (2.3) lassen sich leicht auf eine größere Klasse von glkR ausdehnen. Sei dazu E ein geordneter Banachraum, dessen Kegel abgeschlossen ist und einen inneren Punkt e besitzt (z.B. $C_n(X)$). Dann ist die Vervollständigung von E bezüglich der Norm p_e ein (A)-Funktionenraum. Wegen (1.5) und (1.8), Korollar 3, gilt (2.3) auch in E. Dabei ist die positive Facette von E bei festem inneren Punkt e analog definiert.

§ 3 Strukturraum und Zentrum

Wenn der (A)-Funktionenraum E verbandsgeordnet ist, läßt sich die $\sigma(E',E)$-Topologie auf der Extremalpunktmenge der positiven Facette von E auch als die Topologie beschreiben, deren abgeschlossene Mengen die Träger von vp-Idealen in E sind. In diesem Paragraphen untersuchen wir solche Topologien für den allgemeinen Fall. Insbesondere stellen wir die Frage, wann jede hierfür stetige, reelle Funktion ein Element von E darstellt. In Simplexräumen können wir auf diese Weise den größten in E enthaltenen Verband, das *Zentrum*, charakterisieren.

(3.1) Im folgenden betrachten wir den (A)-Funktionenraum E stets als Banachraum E(X) von $\sigma(E',E)$-stetigen, beschränkten reellen Funktionen auf der Extremalpunktmenge X der positiven Facette C von E.

Definition: Eine Topologie ω auf X heißt eine *Strukturtopologie*, wenn die ω-abgeschlossenen Mengen Träger von vp-Idealen in E sind. Der topologische Raum X_ω heißt dann ein *Strukturraum*.

Satz: *Jede Strukturtopologie ω ist gröber als die die von $\sigma(E',E)$ auf X induzierte Topologie. Jeder Strukturraum ist quasikompakt.*

Beweis: Jeder Träger S in X läßt sich schreiben als ein $S_I = I^o \cap X$ für ein vp-Ideal I in E. Also ist jeder Träger σ-abgeschlossen in X, und es folgt $\omega \leq \sigma$. Seien nun S_γ, $\gamma \in \Gamma$, ω-abgeschlossene Mengen in X mit $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} S_\gamma = \emptyset$. Zeige: $\bigcap S_{\gamma_i} = \emptyset$ für endlich viele γ_i. Weil ω eine Strukturtopologie ist, entspricht jedem S_γ ein vp-Ideal I_γ in E. Aus der Voraussetzung folgt $\underline{H}(\sum_\gamma I_\gamma) = E$. Also gibt es $e_i \in I_{\gamma_i}$ für $i=1,\ldots,n$ mit $e \leq e_1 + \ldots + e_n$. Dann ist aber schon $\underline{H}(\sum_{i=1}^{n} I_{\gamma_i}) = E$, und es folgt $\bigcap_{i=1}^{n} S_{\gamma_i} = \emptyset$, d.h. X_ω ist quasikompakt.

(3.2) Satz: *Sei ω eine Strukturtopologie auf X. Dann ist das System der vp-Ideale I in E, deren Träger S_I ω-abgeschlossen sind, ein distributiver Verband bezüglich der Operationen $I,J \longrightarrow I\,J$, $\underline{H}(I+J)$.*

Beweis: Mit $\underline{I}_\omega(E)$ bezeichnen wir die Menge der vp-Ideale in E mit ω-abgeschlossenem Träger. Seien $I,J \in \underline{I}_\omega(E)$. Dann ist $L = \underline{H}(I+J)$ ein vp-Ideal mit dem Träger $S_L = S_{\underline{H}(I+J)} = S_I \cap S_J$. Also ist auch S_L ω-abgeschlossen und $L \in \underline{I}_\omega(E)$. Sei nun $M = I \cap$ Dann ist $M = \{f \in E: f(S_I \cup S_J) = (0)\}$. $S_I \cup S_J$ ist aber ω-abgeschlossen, also Träger eines vp-Ideales $M' \in \underline{I}_\omega(E)$. Damit gilt $M' = M = I \cap J \in \underline{I}_\omega(E)$ und $S_{I\cap J} = S_I \cup S_J$. Die Distributivgesetze $\underline{H}(I+J) \cap L = \underline{H}(I+L) \cap \underline{H}(J+L)$ und $\underline{H}((I\cap J) + L) = \underline{H}(I\cap L + J\cap$ folgen nun leicht aus den Distributivgesetzen für Durchschnitt und Vereinigung von ω-abgeschlossenen Mengen in X.

Korollar 1: *Sei E ein Simplexraum. Dann gibt es eine feinste Strukturtopologie s, und die Menge aller vp-Ideale in E bildet einen distributiven Verband bezüglich + und ∩ .*

Beweis: Es ist nur zu zeigen, daß die Träger aller vp-Ideale eines Simplexraumes E eine Topologie s auf X definieren. Zunächst ist der Durchschnitt von beliebig vielen Trägern wieder ein Träger, also s-abgeschlossen. Andererseits ist nach (2.7) der Durchschnitt von $I,J \in \underline{I}_s(E)$ vollperfekt. Im folgenden Lemma zeigen wir, daß $(I \cap J)^o = I^o + J^o$ und damit auch $S_{I \cap J} = S_I \cup S_J$ gilt. Die Vereinigung zweier s-abgeschlossener Mengen ist also auch s-abgeschlossen. Weil in Simplexräumen außerdem $\underline{H}(I+J) = I+J$ gilt (2.8), folgt der Rest der Behauptung.

Lemma: *Sei E ein Simplexraum und $I,J \in \underline{I}_s(E)$. Dann ist I^o+J^o ein $\sigma(E',E)$-abgeschlossenes Verbandsideal in E'.*

Beweis: Behauptung und Beweis sind nur eine Übertragung eines analogen Satzes von Lotz |21| über Verbandsideale in Banachverbänden. Seien also $I,J \in \underline{I}_s(E)$. Schon in (1.9) haben wir bemerkt, daß I^o und J^o $\sigma(E',E)$-abgeschlossene Verbandsideale in dem (AL)-Raum E' sind. Es bleibt also nur zu zeigen, daß I^o+J^o σ-abgeschlossen ist. Sei U die Einheitskugel von E. Dann zeigt man, daß in dem Vektorverband E' $A := U^o \cap (I^o+J^o) \subset$ $\subset B := U^o \cap I^o + U^o \cap J^o$ gilt. Weil B σ-kompakt in E' und A σ-abgeschlossen in I^o+J^o ist, ist A σ-kompakt, also auch σ-abgeschlossen in E'.Aus einem Satz von Krein-Smulian (|23|, IV.6.4 Cor) folgt dann die Behauptung.

Korollar 2: *Wenn der (A)-Funktionenraum E ein Verband ist, dann ist die Strukturtopologie s gleich der von σ(E',E) auf X induzierten Topologie. Insbesondere bilden dann die abgeschlossenen Verbandsideale einen distributiven Verband bezüglich + und* (siehe: Lotz |21|).

(3.3) Wir wenden uns nun der Frage zu, für welche Strukturtopologie ω $C(X_\omega) \subset E$ gilt. Gesucht sind also diejenigen Strukturtopologien ω auf X, so daß sich jede ω-stetige, reelle Funktion auf X zu einer σ(E',E)-stetigen, affinen Funktion auf der positiven Facette C fortsetzen läßt. Wegen (2.2), Beispiel ist dies eine Verallgemeinerung des klassischen Dirichletproble

Sei also ω eine Strukturtopologie auf X. Dann sagen wir, daß ω *Partitionen von e in E gestattet*, wenn es in E zu jeder ω-offenen, endlichen Überdeckung von X eine ihr untergeordnete Partition von e gibt. Sei also $X = \bigcup_{i=1}^{n} O_i$, O_i ω-offen. Dann soll es $e_1,\ldots,e_n \in E \cap K$ geben mit $e = e_1+\ldots+e_n$ und $e_i(x) = 0$ für alle $x \notin O_i$ und i=1,...,n. Weiter bezeichnen wir zwei quasikompakte Topologien ω und ω' auf X als *äquivalent*, wenn $C(X_\omega) = C(X_{\omega'})$ gilt.

Satz: *Sei ω eine Strukturtopologie auf X. Genau dann gilt $C(X_\omega) \subset E$, wenn die gröbste, zu ω äquivalente Topologie auf X Partitionen von e in E gestattet.*

Beweis: Sei $C(X_\omega) \subset E$, wobei ω schon die gröbste Topologie aus der Äquivalenzklasse ist. Dann existiert ein assoziierter

kompakter Raum $\hat{X}_\omega$, so daß $C(\hat{X}_\omega)$ isomorph zu $C(X_\omega)$ ist. Jede ω-offene, endliche Überdeckung von X bestimmt auch eine $\hat{\omega}$-offene, endliche Überdeckung von X. Dazu gibt es aber in $C(\hat{X}_\omega)$ eine untergeordnete Partition der Eins. Auf Grund der Isomorphie gilt das auch in $C(X_\omega)$ für die ursprüngliche Überdeckung. Aus $C(X_\omega) \subset E$ folgt dann die Behauptung.

Sei nun $o \leq f \in C(X_\omega)$, wobei ω eine Strukturtopologie auf X ist, die Partitionen von e in E gestattet. Sei weiter $\varepsilon > o$. Dann gibt es ω-offene Mengen $O_1,\ldots,O_n$ in X mit den Eigenschaften: $\bigcup_{i=1}^{n} O_i = X$ und $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ für alle $x,y \in O_i$ und $i=1,\ldots,n$. Nach Voraussetzung existieren $o \leq e_i \in E$ mit $e = e_1 + \ldots + e_n$ und $e_i(x) = o$ für alle $x \notin O_i$. Wähle nun ein $x \in O_i$, und setze $\alpha_i = f(x)$ und $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Da E vollständig ist, genügt es $||f - g|| \leq \varepsilon$ zu zeigen.

Sei dazu $z \in X$ und $z \in O_1,\ldots,O_m$; $z \notin O_{m+1},\ldots,O_n$. Dann ist

$$|f(z) - g(z)| = |\sum_{i=1}^{n} e_i(z)f(z) - \sum_{i=1}^{n} e_i(z)\alpha_i| =$$

$$= |\sum_{i=1}^{m} (f(z) - \alpha_i)e_i(z) \leq \varepsilon \text{ , was zu zeigen war.}$$

Korollar (Effros |13|): *In einem Simplexraum E gilt $C(X_s) \subset E$ für die feinste Strukturtopologie s auf X.*

Beweis: Wir zeigen, daß die s-Topologie in Simplexräumen Partitionen von e in E gestattet. Sei dazu $X = \bigcup_{i=1}^{n} O_i$, bzw. $\bigcap_{i=1}^{n} S_i = \emptyset$, wobei S_i Träger von $I_i \in \underline{I}_s(E)$ ist. Dann gilt $E = \sum_{i=1}^{n} I_i$ wegen (2.7) und (3.2). Da $e \in E$ ist, gibt es also $o \leq e_i \in I_i$ mit $e = e_1 + \ldots + e_n$. Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung: Man sieht leicht, daß die Strukturtopologie s in einem Simplexraum E sogar Partitionen zu jedem $o \leq g \in E$ gestattet. Wie oben beweist man damit das folgende Resultat von Effros |13|: Sei E ein Simplexraum, $g \in E$ und $f \in C(X_s)$. Dann stellt auch die Funktion $f \cdot g$ mit $(fg)(x) = f(x)g(x)$ für $x \in X$ ein Element von E dar.

(3.4) Lemma: *Sei E ein (A)-Funktionenraum und $f \in E$. Wenn $h = sup(-f,f)$ in E existiert, dann ist $h(x) = |f(x)|$ für alle x*

Beweis: Sei $h = \inf\{g \in E: \pm f \leq g\} \in E$. Jedes $x \in X$ ist Träger eines vp-Ideales in E. Deshalb gibt es zu jedem $\varepsilon > o$ ein $g \in E$ mit $\pm f \leq \varepsilon e + g$ und $h(x) \leq \varepsilon + g(x) = \varepsilon + |f(x)|$. Daraus folgt $h(x) \leq |f(x)|$ für alle $x \in X$. Die andere Ungleichung ist trivial.

Satz: *Sei F ein abgeschlossener Teilraum des (A)-Funktionenraumes E mit $e \in F$. Wenn F ein Unterverband von E ist* (d.h. für $f \in F$ existiert $\sup_E(-f,f)$ und liegt in F), *dann läßt sich F charakterisieren als ein $C(X_\omega)$ für eine Strukturtopologie ω.*

Beweis: Das Lemma zeigt, daß man F als Banachverband von Funktionen auf X auffassen kann. Die Träger der abgeschlossenen Verbandsideale in F definieren eine Topologie ω auf X, für die F isomorph zu $C(X_\omega)$ ist. Sei nun I ein abgeschlossenes Verbandsideal in F. Dann ist $J = \underline{H}(I)$ ein vp-Ideal in E mit dem selben Träger in X wie I. Also ist ω auch eine Strukturtopologie für E

(3.5) Aus dem obigen Satz und (3.3), Korollar, folgt sofort, daß es in Simplexräumen einen größten Unterverband gibt, der e enthält. Damit können wir das von Effros |13| gestellte Problem der ordnungstheoretischen Charakterisierung von $C(X_s)$ lösen.

Definition: In einem Simplexraum E heißt $Z := \{f \in E: \sup(f-\alpha e, o)$ existiert in E für alle $\alpha \in \mathbb{R}\}$ das (Ordnungs-) *Zentrum* von E.

Satz: *In einem Simplexraum E ist das Zentrum Z isomorph zu $C(X_s)$, dem größten, (abgeschlossenen) Unterverband von E, der e enthält.*

Beweis: Wir identifizieren $C(X_s)$ mit einem Teilraum von E. Wegen (3.3) gilt $C(X_s) \subset E$. Sei umgekehrt $f \in Z$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $o \leq \sup(f-\alpha e, o)$, $\sup(-\alpha e+f, o) \in E$. Daraus folgt, daß $\{x \in X: f(x) \leq \alpha\}$ und $\{x \in X: f(x) \geq \alpha\}$ Träger von vp-Idealen in E, also s-abgeschlossen sind. Weil damit f ober- und unterhalb stetig ist, gilt $f \in C(X_s)$.

Korollar (Effros |13|): ***Für einen Simplexraum E sind die folgenden Bedingungen äquivalent:***

(a) E ist Vektorverband.

(b) E ist norm- und ordnungsisomorph zu $C(X_\sigma)$.

(c) X_s ist ein Hausdorffraum.

(d) Die Strukturtopologie s ist gleich der von $\sigma(E', E)$ auf X induzierten Topologie.

(3.6) Beispiel: Sei $E_r = \{f \in C([o,1]): \frac{1}{r}(\int_o^r f(t)dt) = f(1)$ für ein $o < r \leq 1$. Dann ist E_r ein Simplexraum mit $X = [o,1)$. Die abgeschlossenen Mengen der s-Topologie auf X sind die in $[o,1)$ abgeschlossenen Mengen M, die folgender Bedingung genügen: Ist $[t,1) \subset M$ für ein $t \in [o,1)$, so ist $[o,r] \subset M$. Das Zentrum besteht aus $Z = \{f \in E_r$: f konstant auf $[o,r]$. Insbesondere ist das Zentrum von E_1 eindimensional.

Bemerkung: Wie in (2.8) lassen sich die Ergebnisse von (3.1) und (3.2) auf geordnete Banachräume mit einem inneren Punkt des positiven Kegels übertragen.

§ 4 T-invariante Ideale

Für Räume vom Typ C(X) und einen positiven Endomorphismus T hat Schaefer |24,25| T-invariante Verbandsideale untersucht. Wir verallgemeinern hier einige seiner Sätze für T-invariante vp-Ideale in geordneten Banachräumen, deren Kegel einen inneren Punkt besitzt. Insbesondere können wir die maximalen *T-Ideale* charakterisieren und einen Satz über den Spektralradius *irreduzibler* Operatoren beweisen.

(4.1) Einige elementare Eigenschaften der vp-Ideale und ein grundlegendes Lemma benötigen wir häufig in diesem Paragraphen. Sie sind deshalb hier ohne Beweis zusammengestellt:

Sei E ein glkR, A ein volles Ideal in E. Dann gibt es ein größtes vp-Ideal I_A, das in A enthalten ist. Für $o < \phi \in E'$ schreiben wir $I_\phi = I_{\phi^{-1}(o)}$.

Seien E,F glkR, I,J Teilräume von E bzw. F. Sei T ein positiver, stetiger Operator von E in F. Ist $I \subset \underline{H}_E(I)$, so gilt auch $TI \subset \underline{H}_F(TI)$. Also ist für ein vp-Ideal I in E $J = \underline{G}_F(TI)$ ein vp-Ideal in F. Wenn J ein volles Ideal in F ist, dann ist $T^{-1}J$ ein volles Ideal in E.

Sei E ein glkR und T ein positiver, stetiger Endomorphismus von E. Wenn A ein volles, T-invariantes Ideal in E ist, dann ist auch I_A T-invariant.

Lemma (Krein-Rutman,|23|): *Sei E ein geordneter Banachraum, dessen positiver Kegel einen inneren Punkt besitzt, und sei T ein positiver Endomorphismus von E. Dann gibt es einen positiven Eigenwert von T' mit positivem Eigenvektor.*

(4.2) Im folgenden sei E immer ein geordneter Banachraum, dessen positiver Kegel K einen inneren Punkt, etwa e, besitze und abgeschlossen sei. Auch hier läßt sich jedes vp-Ideal I in E durch $I^{\circ} \cap C$ in der positiven Facette $C = \{o \leq \phi \in E' : \phi(e)=1\}$, bzw. durch seinen Träger $S_I = I^{\circ} \cap X$ charakterisieren, wobei X die Menge der Extremalpunkte von C ist (siehe:(2.8)). Außerdem sei T immer ein positiver Endomorphismus von E.

Definition: Ein Teilraum I von E heißt ein *T-Ideal*, wenn I ein von E verschiedenes vp-Ideal mit $TI \subset I$ ist. Der Operator T heißt *irreduzibel*, wenn es in E kein T-Ideal außer (o) gibt.

Bemerkung: Ein irreduzibler Operator ist auch irreduzibel im Sinne von Schaefer (|23|, app.§3). Beide Definitionen stimmen überein, wenn jedes vp-Ideal einen nicht-trivialen Positivteil hat (Simplexräume, C -Algebren, $C_n(X)$).

(4.3) Satz: *Jeder positive Operator T auf E besitzt maximale T-Ideale, und jedes T-Ideal ist in einem maximalen T-Ideal enthalten.*

Beweis: Weil K abgeschlossen ist, ist E archimedisch geordnet. Deshalb gilt $\underline{H}(o) = (o)$, und (o) ist ein T-Ideal. Sei nun I_γ, $\gamma\in\Gamma$, eine totalgeordnete Familie von T-Idealen in E. Dann ist $e \notin \bigcup_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma$, woraus folgt, daß auch $e \notin J = \underline{H}(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} I_\gamma)$ gilt. Also ist J ein von E verschiedenes vp-Ideal. J ist sogar ein T-Ideal, weil aus $TI \subset I$ immer $T(\underline{H}(I)) \subset \underline{H}(I)$ folgt. Damit ist J eine obere Schranke der Menge $\{I_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$ von T-Idealen, woraus die Existenz maximaler Elemente folgt.

Korollar: *Wenn I und J verschiedene maximale T-Ideale sind, dann gilt für ihre Träger* $S_I \cap S_J = \emptyset$.

(4.4) Lemma: *Sei T ein positiver Operator auf E, und sei J ein T-Ideal in E. Dann induziert T einen positiven Operator* $\hat{T}$ *auf* $\hat{E} = E/J$, *und es besteht eine eineindeutige Beziehung zwischen den* $\hat{T}$*-Idealen in* $\hat{E}$ *und den T-Idealen in E, die J enthalten.*

Beweis: Da $TJ \subset J$ gilt, ist für $f\in E$ $\hat{T}\hat{f} = \hat{T}f$ wohldefiniert, und ein Teilraum in $\hat{E}$ ist genau dann $\hat{T}$-invariant, wenn sein Urbild bezüglich der Quotientenabbildung T-invariant ist. Aus (1.6) folgt dann die eineindeutige Beziehung zwischen den invarianten Idealen. Außerdem sei bemerkt, daß $\hat{E}$ mit der Quotiententopologie ein geordneter Banachraum ist, dessen Kegel $\hat{K}$ (bzw. $\overline{\hat{K}}$) den inneren Punkt $\hat{e}$ besitzt.

Satz: *Jedes maximale T-Ideal in E läßt sich darstellen als ein vp-Ideal* I_ϕ , *wobei* $\phi\in C$ *und* $T'\phi = \rho\phi$ *ist für einen geeigneten Eigenwert* $\rho \geq o$.

Beweis: Sei J ein maximales T-Ideal in E. Dann ist der von T in $\hat{E} = E/J$ induzierte Operator $\hat{T}$ auf Grund des Lemmas irreduzibel. Es gibt nun ein $o \leq \rho \in \mathbb{R}$ und ein $o < \hat{\phi} \in E'$ mit $\hat{T}'\hat{\phi} = \rho\hat{\phi}$ und $\hat{\phi}(\hat{e})=1$. Weil aber $\hat{\phi}^{-1}(o)$ $\hat{T}$-invariant ist, folgt aus (4.1), daß das vp-Ideal $\hat{I}_{\hat{\phi}}$ sogar ein $\hat{T}$-Ideal in $\hat{E}$ ist. Nun ist $\hat{T}$ irreduzibel, also folgt $\hat{I}_{\hat{\phi}} = (\hat{o})$. Weil $\hat{E}'$ isomorph zu J^o in E' ist, gibt es ein $o < \phi \in E'$ mit $T'\phi = \rho\phi$, $\phi(e)=1$ und $I_\phi = J$, was zu zeigen war.

(4.5) Ein stetiger Operator T in einem Banachraum F heißt *ergodisch*, wenn die Folge $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=o}^{n-1} T^k$ in der starken Operatortopologie konvergiert. Die zugehörige Projektion auf den Fixraum von T in F bezeichnen wir mit P. Einen positiven Operator T in E mit $Te = e$ nennen wir *Markov-Operator*.

Satz: *Sei T ein ergodischer Markov-Operator in E. Dann entsprechen die maximalen T-Ideale eineindeutig den Extremalpunkten der positiven Facette* $\{o < \phi \in E' : \phi(e)=1,\ T'\phi = \phi\}$ *des Fixraumes PE von T.*

Beweis: PE ist ein geordneter Banachraum mit e als innerem Punkt des positiven Kegels $K \cap PE$. Aus (|23|, V.5.4, cor) folgt daß P'E' auch ordnungsisomorph (als Teilraum von E') zu (PE)' ist. Damit entsprechen nach (2.3) und (4.2) die maximalen vp-Ideale in PE eineindeutig den Extremalpunkten der positiven Facette $\{o < \phi \in P'E' : \phi(e) = 1\}$ von PE. Wir brauchen deshalb nur noch zu beweisen, daß zwischen den maximalen T-Idealen in E und den maximalen vp-Idealen in PE eine eineindeutige Beziehung besteht.

Sei I ein maximales T-Ideal in E. Dann ist $PI = I \cap PE$ ein vp-Ideal in PE. Sei weiter M ein vp-Ideal in PE mit $PI \subsetneq M \subsetneq PE$. $J = I_P{}^{-1}{}_{(M)}$ ist ein T-Ideal in E , da $P^{-1}(M)$ T-invariant ist. Es gilt nun $I \subset J \subsetneq E$! Wegen $I \cap PE \subsetneq J\ PE = M$ ist $I \subsetneq J$ im Widerspruch zur Maximalität von I. Deshalb ist PI ein maximales vp-Ideal in PE.

Sei jetzt M ein maximales vp-Ideal in PE. Dann ist $I = I_P{}^{-1}{}_{(M)}$ ein T-Ideal in E. Wenn es in E ein T-Ideal J mit $I \subsetneq J$ gibt, dann ist PJ ein vp-Ideal in PE; und es gilt $M = PI \subsetneq PJ = PE$. Also ist $e \in PJ \subset J$, und J kann kein T-Ideal sein. Damit ist gezeigt, daß $I = I_P{}^{-1}{}_{(M)}$ ein maximales T-Ideal in E ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die Beziehung $I \longrightarrow PI$ für maximale Ideale eineindeutig ist. Seien dazu I,J maximale vp-Ideale in E. Dann ist $\underline{H}_E(I+J) = E$. Deshalb gibt es $f \in I$, $g \in J$ mit $e = Pe \leq Pf + Pg$. Das bedeutet aber, daß $\underline{H}_{PE}(PI+PJ) = PE$ ist, d.h. $PI \neq PJ$. Ebenso zeigt man die Eineindeutigkeit der Beziehung $M \longrightarrow I_P{}^{-1}{}_{(M)}$, womit alles bewiesen ist.

(4.6) Satz: *Sei T ein irreduzibler Markov-Operator in E. Dann ist der Fixraum von T eindimensional, und jeder positive Eigenvektor von T' ist strikt positiv.*

Beweis: Sei $Tf = f$ mit $p_e(f) = 1$ für $f \in E$. Dann ist $g = e - f \leq o$ und $Tg = g$. Für das von g in E erzeugte vp-Ideal gilt: $I = \underline{H}(\langle g \rangle) \neq E$. Denn aus $e \in I$ folgt $e \leq ng = ne - nf$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Das ergibt aber $f \leq \frac{n-1}{n} e$ im Widerspruch zur

Annahme: $p_e(f) = 1$. Weil I ein T-Ideal ist, folgt aus der Irreduzibilität von T: $I = (o)$, d.h. $e - f = g = o$, was zu zeigen war.

Sei $o < \phi \in E'$ ein Eigenvektor von T'. Dann ist $\phi^{-1}(o)$ T-invariant, und I_ϕ ist ein T-Ideal. Wenn es ein $o < f \in E$ mit $\langle \phi, f \rangle = o$ gibt, ist $I_\phi \neq (o)$ und T nicht irreduzibel. Für alle $o < f \in E$ gilt also $\langle \phi, f \rangle \neq o$.

(4.7) Satz: *Sei T ein positiver Operator in E, und sei dim E > 1. Wenn T irreduzibel ist, gilt für den Spektralradius: r(T) > o.*

Beweis: Wir nehmen an, daß T irreduzibel und topologisch nilpotent sei. Dann gibt es zu T' einen positiven Eigenvektor $o < \phi \in E'$ zum Eigenwert o. Aus $T'\phi = o$ folgt $\langle Te, \phi \rangle = \langle e, T'\phi \rangle = o$, d.h. $Te \in \phi^{-1}(o)$. Weil Te positiv ist, gilt sogar $Te \in I_\phi$, wobei I_ϕ ein T-Ideal ist. T war irreduzibel vorausgesetzt. Also folgt $I_\phi = (o)$ und insbesondere $Te = o$. Der Operator $T \equiv 0$ kann aber wegen (2.3) auf E mit dim E > 1 nicht irreduzibel sein, womit die Behauptung bewiesen ist.

§ 5 Vollperfekte Markov-Operatoren

In diesem Paragraphen untersuchen wir solche Operatoren, für die das Urbild eines vp-Ideals wieder ein vp-Ideal ist. Wir beschränken uns dabei auf Markov-Operatoren in (A)-Funktionenräumen. Besonders einfache Charakterisierungen der *vollperfekten* Markov-Operatoren ergeben sich für den Fall, daß der Urbildraum ein Verband oder ein Simplexraum ist.

(5.1) Im folgenden seien (E,e_1) und (F,e_2) immer (A)-Funktionenräume mit den positiven Facetten C bzw. D und deren Extremalpunktmengen X bzw. Y. Wenn nicht ausdrücklich anders gesagt betrachten wir die Elemente von E bzw. von F als stetige, affine Funktionen auf den σ-kompakten, konvexen Mengen C bzw. D. Weiter sei T ein Markov-Operator von E in F, d.h. T ist positiv und es gilt $Te_1 = e_2$.

Lemma: *Zu jedem Markov-Operator $T: E \longrightarrow F$ gibt es eine zugehörige, σ-stetige, affine Transformation φ von D in C, so daß $Tf = f\circ\varphi$ für alle $f\in E$ gilt.*

Beweis: Wegen $Te_1 = e_2$ gilt für $\phi\in D$:
$1 = \langle e_2,\phi\rangle = \langle Te_1,\phi\rangle = \langle e_1,T'\phi\rangle$. Also ist $T'\phi\in C$ und $\varphi := T'|_D$ ist die gesuchte Transformation.

Definition: Ein Markov-Operator $T: E \longrightarrow F$ heißt *vollperfekt*, wenn für jedes vp-Ideal J in F $T^{-1}J$ ein vp-Ideal in E ist.

(5.2) Sei $S \subset X$. Dann ist $I = \bigcap_{\phi \in S} \phi^{-1}(o)$ ein volles Ideal in E. Wir sagen, daß $I^o \cap X$ von S *erzeugt* wird.

Satz: *Sei $T: E \longrightarrow F$ ein Markov-Operator. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) T ist vollperfekt.

(b) Für die zu T gehörende Transformation τ und jeden Träger S_J eines vp-Ideales J in F gilt: $\tau(S_J)$ erzeugt den Träger eines vp-Ideales in E.

(c) Sei $f \in E$ und S ein Träger in Y mit $Tf(y) = \alpha$ für alle $y \in S$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > o$ ein $g \in E$ mit $\pm f \leq g + \varepsilon e_1$ und $Tg(y) = |\alpha|$ für alle $y \in S$.

Beweis: (a) $\Longrightarrow$ (b): Sei $J = J_y$, $y \in Y$, ein maximales vp-Ideal in F. Dann ist auch $T^{-1}J = I_x$, $x \in X$, ein maximales vp-Ideal in E. Daraus folgt, daß $\tau(X) \subset Y$ gilt. Sei nun J ein vp-Ideal in F und sei $I = T^{-1}J$ nach Voraussetzung vollperfekt in E. Der Träger $S_J = J^o \cap Y$ ist σ-total in J^o. Also ist auch $\tau(S_J) = T'(J^o \cap Y)$ σ-total in $T'J^o$. Andererseits gilt $I^o = (T^{-1}J)^o = \overline{T'J^o}$. Das bedeutet, daß $\tau(S_J)$ σ-total in I^o ist und $I = \bigcap_{\phi \in \tau(S_J)} \phi^{-1}(o)$ gilt. Damit erzeugt $\tau(S_J)$ den Träger $I^o \cap X$ des vp-Ideales I.

(b) $\Longrightarrow$ (c): Sei $Tf(y) = \alpha$ für alle y aus dem Träger S_J in Y. $\tau(S_J)$ erzeuge nach Voraussetzung den Träger S_I in X.

Weil $Tf = f\circ\varphi$ gilt, ist $f(x) = \alpha$ für alle $x \in \varphi(S_J)$. Also ist auch $f(x) = \alpha$ für alle $x \in S_I$, das von $\varphi(S_J)$ erzeugt wird. I ist vollperfekt und $(f-\alpha e_1)$ liegt in I. Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es dann ein $h \in I$ mit $\pm(f-\alpha e_1) \leq h + \varepsilon e_1$. Daraus folgt $\pm f \leq$ $\leq (h+|\alpha|e_1) + \varepsilon e_1$. Setze $g = (h+|\alpha|e_1)$. Dann ist $Tg =$ $= h\circ\varphi + |\alpha|e_2$. Weil $h\circ\varphi(y) = 0$ ist für alle $y \in S_J$, gilt $Tg(y) = h\circ\varphi(y) + |\alpha| = |\alpha|$, was zu zeigen war.

(c) (a): Sei J ein vp-Ideal in E. Dann ist $T^{-1}J$ ein volles Ideal in E. Es bleibt zu zeigen, daß $T^{-1}J \subset \underline{H}(T^{-1}J)$ gilt. Sei $f \in T^{-1}J$. Da dann $Tf \in J$ ist, gilt $Tf(y) = 0$ für alle $y \in S_J$. Nach Voraussetzung gibt es nun zu jedem $\varepsilon>0$ ein $g \in E$ mit $\pm f \leq g+\varepsilon e_1$ und $Tg(y) = 0$ für alle $y \in S_J$. Also ist $Tg \in J$ und $f \in \underline{H}(T^{-1}J)$.

Korollar: *Jeder vp-Markov-Operator $T: E \longrightarrow F$ ist Extremalpunkt der Menge der Markov-Operatoren von E in F.*

Beweis: Sei $T = \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2$ eine Summe von Markov-Operatoren T_1, T_2. Für die zugehörigen Transformationen gilt dann $\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2)$. Weil T vollperfekt ist, liegt $\varphi(y)$ in X für alle $y \in Y$. Daraus folgt sofort $\varphi(y) = \varphi_1(y) = \varphi_2(y)$ für alle $y \in Y$. Nach Krein-Milman ist dann auch $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$ und damit $T = T_1 = T_2$, was zu zeigen war.

(5.3) Sei E ein (A)-Funktionenraum, $\phi \in C$. Genau dann ist ϕ ein vp-Markov-Operator von E in $\mathbb{R}$, wenn ϕ Extremalpunkt von C ist.

Sei E ein (A)-Funktionenraum, I ein volles Ideal und π die Quotientenabbildung von E auf $\hat{E} = E/I$. Genau dann ist π ein vp-Markov-Operator von E in den von $(\hat{E},\hat{e})$ erzeugten (A)-Funktionenraum, wenn I ein vp-Ideal in E ist.

Seien *A*, *B* C^*-Algebren und T ein *-Homomorphismus von *A* in *B* mit $Te_1 = Te_2$. Wenn wir die Teilräume der hermiteschen Elemente von *A* bzw. von *B* mit E_1 bzw. E_2 bezeichnen, dann ist die Einschränkung von T auf E_1 ein vp-Markov-Operator von E_1 in E_2.

(5.4) Satz: *Sei $T: E \longrightarrow F$ ein Markov-Operator und E ein Verband. Genau dann ist T vollperfekt, wenn TE ein Unterverband in F und T ein Verbandshomomorphismus von E auf TE ist.*

Beweis: TE ist ein Unterverband in F, wenn für alle $f \in E$ $\sup_F(Tf,-Tf) = \inf\{h \in F: \pm Tf \leq h\}$ existiert. Sei nun T ein vp-Markov-Operator von E in F. Jedes $y \in Y$ ist Träger eines vp-Ideales in F. Wenn also $\pm Tf \leq h \in F$ ist, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $y \in Y$ ein $g \in E$ mit $\pm f \leq g + \varepsilon e_1$ und $Tg(y) = |Tf(y)| \leq h(y)$. Nach Voraussetzung ist E ein Verband. Also gilt $\pm f \leq |f| \leq g + \varepsilon e_1$ und $\pm Tf \leq T|f| \leq Tg + \varepsilon e_2$. Daraus folgt $T|f|(y) \leq h(y) + \varepsilon$ für beliebiges $y \in Y$ und $\varepsilon > 0$. Damit ist $T|f| \leq h$ für $\pm Tf \leq h \in F$, d.h. $T|f| = \sup_E(Tf,-Tf) = |Tf|$. T ist somit ein Verbandshomomorphismus auf den Verband TE. Die andere Implikation ist leicht einzusehen.

(5.5) Satz: *Sei $T: E \longrightarrow F$ ein Markov-Operator. Ist E ein Simplexraum, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) T ist vollperfekt.

(b) Für die zu T gehörende Transformation ψ gilt $\psi(Y) \subset X$.

(c) Zu jedem $f \in E$, $h \in F$ mit $\pm Tf \leq h$ gibt es ein $g \in E$ mit $\pm f \leq g$ und $Tg \leq h$.

Bemerkung: Für den Fall, daß E und F Simplexräume sind, hat Jellett |16| die Äquivalenz von (b) und (c) bewiesen.

Beweis: Wir betrachten die Elemente von E bzw. F stets als stetige Funktionen auf der zugehörigen positiven Facette. Insbesondere soll sich die Ordnungsrelation " $\leq$ " (und die Operationen "sup" bzw. "inf") auf den Raum aller stetiger Funktionen auf C_σ bzw. D_σ beziehen. Für den Beweis benötigen wir zunächst das folgende

Lemma: Seien $f_1, f_2 \in E$. Dann ist $l := \sup(f_1, f_2)$ eine stetige, konvexe Funktion auf C_σ, und es gilt

$u := \inf\{g \circ \psi : l \leq g \in E\} = v := \inf\{h \in F : l \circ \psi \leq h\}$.

Beweis des Lemmas: Nach Voraussetzung ist C ein Simplex. Also folgt aus dem "Eindeutigkeitstheorem von Choquet-Meyer" (|3|, 4.3.4), daß $\bar{l} := \inf\{g \in E : l \leq g\}$ eine affine, oberhalb stetige Funktion auf C ist. Damit ist $u = \bar{l} \circ \psi$ affin und oberhalb stetig auf D. Sei nun $y \in Y$. Dann gilt wegen (3.4), Lemma, $u(y) = v(y) = |l \circ \psi(y)|$. Für $l \circ \psi \leq h \in F$ ist also $u(y) = v(y) \leq h(y)$, so daß $h-u$ eine unterhalb stetige, affine Funktion auf D ist, die auf Y positiv ist. Aus dem Minimumprinzip für

halbstetige, affine Funktionen ([3],2.2.1) folgt, daß $h \leq u$ ist auf ganz D. Also gilt $u \leq v$. Die andere Ungleichung ersieht man sofort aus der Definition von u und v, womit $u = v$ auf D bewiesen ist.

(a)$\Longrightarrow$(b): Folgt aus (5.2.b).

(b)$\Longrightarrow$(c): Seien $f_1, f_2, 1$ wie im Lemma, und es sei $1 \circ \varphi < h$ für ein $h \in F$. Auf Grund des Lemmas gibt es nun zu jedem $d \in D$ ein $g \in E$ mit $1 \leq g$ und $g \circ \varphi(d) < h(d)$. D ist kompakt. Also existieren $g_1, \ldots, g_n \in E$ mit $1 \leq g_1$, so daß $\inf_i (g_i \circ \varphi) < h$ gilt. Nach Voraussetzung besitzt E die Interpolationseigenschaft [Z']. Weil $f_1, f_2 \leq g_1, \ldots, g_n$ ist, gibt es also ein $g_o \in E$ mit $f_1, f_2 \leq g_o$ und $Tg_o < h$.

Nun sei $f \in E$ und $\pm Tf \leq h \in F$. Dann können wir eine Folge (g_n) in E konstruieren mit $\pm f - \frac{1}{2^n} e_1 \leq g_n$ und $Tg_n < h$. Sei nämlich $g_1, \ldots, g_n$ so gewählt, dann gilt $\pm Tf - \frac{1}{2^{n+1}} e_2 < h$ und $Tg_n - \frac{1}{2^{n+1}} e_2 < h$. Wenn man $1 := \sup(f, -f, g_n) - \frac{1}{2^{n+1}} e_1$ setzt, dann gibt es nach obiger Überlegung ein $g'_{n+1} \in E$ mit $1 \leq g'_{n+1}$ und $Tg'_{n+1} < h$. Wegen [Z'] können wir sogar ein $g_{n+1} \in E$ wählen mit $1 \leq g_{n+1} \leq g'_{n+1}, g_n + \frac{1}{2^{n+1}} e_1$. Dafür gilt dann:

$\|g_n - g_{n+1}\| \leq \frac{1}{2^n}$, $\pm f - \frac{1}{2^{n+1}} e_1 \leq g_{n+1}$ und $Tg_{n+1} < h$.

Da E vollständig ist, konvergiert die Folge (g_n) gegen ein $g \in E$. Es ist leicht zu sehen, daß $\pm f \leq g$ und $Tg \leq h$ gilt.

(c)$\Longrightarrow$(a): J sei ein vp-Ideal in F. Dann ist nur zu zeigen, daß $T^{-1}J \subset \underline{H}(T^{-1}J)$ gilt. Zunächst stellen wir fest, daß TE

die Eigenschaft [Z'] in F besitzt. Sei nämlich $\pm Tf \leq h_1, h_2$ für $f \in E$ und $h_1, h_2 \in F$. Dann gibt es nach Voraussetzung $g_o, g_1, g_2 \in E$ mit $\pm f \leq g_o \leq g_1, g_2$ und $Tg_1 \leq h_1$ bzw. $Tg_2 \leq h_2$. Also ist auch $Tg_o \leq h_1, h_2$. Wie in (2.7) kann man damit zeigen, daß $J \cap TE \subset J^+ - J^+$ gilt. Für $Tf \in J$ gibt es somit ein $h \in J$ mit $\pm Tf \leq h$. Wieder nach Voraussetzung gibt es auch ein $g \in E$ mit $\pm f \leq g$ und $Tg \leq h$, d.h. $Tg \in J$. $T^{-1}J$ ist also positiv-erzeugt in E, und es gilt $T^{-1}J \subset \underline{H}(T^{-1}J)$, was zu zeigen war.

Korollar 1: *Sei $T: E \longrightarrow F$ ein Markov-Operator in einem Simplexraum E. T ist genau dann vollperfekt, wenn Ψ eine stetige Abbildung von X_s in X_s induziert.*

Korollar 2: *Sei E ein Simplexraum. Die kanonische Injektion $i: E \longrightarrow E''$ ist genau dann vollperfekt, wenn E ein Verband ist.*

Korollar 3: *Zwei Simplexräume E und F sind genau dann norm- und ordnungsisomorph, wenn es einen affin-linearen Homöomorphismus von C auf D gibt, dessen Einschränkung auf X eine Homöomorphie der Strukturräume X_s und Y_s ergibt.*

(5.6) Satz: *Sei E ein (A)-Funktionenraum und $T: E \longrightarrow E$ ein vp-Markov-Operator. Genau dann ist T irreduzibel, wenn für jedes $x \in X$ und für jede Strukturtopologie ω, bezüglich der $\Psi: X_\omega \longrightarrow X_\omega$ stetig ist, die Bahn $\{\Psi^n(x): n \geq o\}$ ω-dicht in X ist.*

Beweis: Sei ω eine Stukturtopologie, und sei Ψ ω-stetig. Wenn es ein $x \in X$ gibt mit $S = \{\Psi^n(x): n \geq o\}$, dann ist $\overline{S}^{\omega}$ Träger eines T-Ideales I in E. Denn aus $\Psi(S) \subset S$, bzw. $\Psi(\overline{S}^{\omega}) \subset \overline{S}^{\omega}$ folgt $TI \subset I$. Für T irreduzibel gilt also $I = (o)$, d.h. $\overline{S}^{\omega} = X$. Sei umgekehrt $(o) \neq I$ ein maximales T-Ideal mit dem Träger S'. Da T ein vp-Markov-Operator und I maximal ist, gilt $TI \subset I = T^{-1}I$. Also ist auch $\Psi(S') \subset S' = \Psi^{-1}(S')$, und Ψ ist stetig für die Strukturtopologie ω' mit den abgeschlossenen Mengen $\{\emptyset, S', X\}$. Da $I \neq (o)$ war, gibt es ein $x \in S'$, dessen Bahn in S' enthalten ist. S' ist aber ω'-abgeschlossen und echt enthalten in X, was zu zeigen war.

Korollar: *Ein vp-Markov-Operator T in einem Simplexraum E ist genau dann irreduzibel, wenn für jedes x X die Bahn* $\{\Psi^n(x): n \geq o\}$ *s-dicht in X ist.*

§ 6 Über das Spektrum positiver Operatoren in Simplexräumen

Wie das Beispiel in (|23|, app. §3) zeigt, gilt für das Spektrum von positiven Operatoren in (A)-Funktionenräumen im allgemeinen nur $r(T) \in \sigma(T)$. Dagegen sind in Banachverbänden insbesondere für Verbandshomomorphismen viele weitere Eigenschaften des Spektrums bekannt (|20|,|25|,|28|). Einige dieser Ergebnisse lassen sich für Simplexräume verallgemeinern.

(6.1) Im folgenden sei (E,e) die Komplexifizierung eines Simplexraumes (F,e). Wir können dann E als Banachraum E(X) von stetigen, komplexwertigen Funktionen auf der Extremalpunktmenge X der positiven Facette C von F auffassen. Weiter sei $T \in \mathcal{L}(E)$ ein Operator, der sich als kanonische Fortsetzung eines Operators $T_o \in \mathcal{L}(F)$ ergibt. Wir sagen, daß E bzw. T eine Ordnungseigenschaft besitzt, wenn F bzw. T_o diese Eigenschaft besitzt. Für alle Begriffe aus der Spektraltheorie sei auf (|23|, app.) verwiesen.

Satz: *Sei E ein Simplexraum und T: E ⟶ E ein Markov-Operator. Dann ist das periphere Spektrum zyklisch.*

Beweis: Man überlegt sich leicht, daß $E'_\beta{}'$ norm- und ordnungsisomorph zu einem (AM)-Raum mit Einheit ist. $T'':E''\longrightarrow E''$

ist ein Markov-Operator, und wegen $\sigma(T) = \sigma(T'')$ folgt die Behauptung aus (|20|, 4.7).

Bemerkung: Der obige Satz gilt allgemeiner für positive Operatoren, die die Eigenschaft (W) besitzen |20|. Es ist nicht bekannt, ob für einen Simplexraum E und einen vp-Markov-Operator T die Biadjungierte T'' ein Verbandshomomorphismus in E'' ist. (5.5), Korollar 2, spricht gegen diese Vermutung, und so lassen die Eigenschaften des Spektrums von Verbandshomomorphismen nicht auf diese Weise für vp-Markov-Operatoren übertragen.

(6.2) Sei Z_o das Zentrum von F. Dann ist das (komplexe) Zentrum Z von E die Komplexifizierung von Z_o bzw. der größte, komplexe Unterverband von E, der e enthält.

Lemma: *Sei $T: E \longrightarrow E$ ein vp-Markov-Operator. Dann ist die Einschränkung T_Z von T auf das Zentrum Z ein Verbandshomomorphismus von Z in Z.*

Beweis: Aus (5.4) folgt, daß TZ ein Verband ist. Wegen $Te = e$ gilt also $TZ \subset Z$. Die Einschränkung T_Z ist wieder vollperfekt, weil Z ein Unterverband von E ist. Also ist T ein Verbandshomomorphismus von Z in Z.

Wir nennen nun das Spektrum $\sigma(T_Z)$ von T_Z in Z das *zentrale Spektrum* $\sigma_Z(T)$ von T. Ebenso bezeichnen wir das (approximative) Punktspektrum von T_Z mit $P\sigma_Z(T)$ (bzw. $A\sigma_Z(T)$). Das zentrale Spektrum eines vp-Markov-Operators ist

also das Spektrum eines Markov-Verbandshomomorphismus in einem (AM)-Raum mit Einheit und besitzt als solches eine sehr regelmäßige Gestalt |28|.

Satz: *Sei* $T: E \longrightarrow E$ *ein vp-Markov-Operator, und sei* $Tf = \lambda f$ *mit* $f \in E$ *und* $f(x) \neq o$ *für alle* $x \in X$. *Dann gilt* $\lambda \cdot P\sigma_Z(T) \subset P\sigma(T)$, *wobei* $P\sigma_Z(T)$ *zyklisch ist.*

Beweis: Daß $P\sigma(T)$ zyklisch ist, folgt aus (|20|, 3.2). Sei nun $\mu \in P\sigma_Z(T)$, d.h. $T_Z g = Tg = \mu g$ für ein $o \neq g \in Z$. Auf Grund der Bemerkung in (3.3) gilt $f \cdot g \in E(X)$ und $Tf \cdot Tg \in E(X)$. Weil T ein vp-Markov-Operator ist, gibt es ein $\Psi: X \longrightarrow X$ mit $T(f \cdot g) = f \cdot g \circ \Psi = (f \circ \Psi) \cdot (g \circ \Psi) = Tf \cdot Tg$. Damit ist gezeigt, daß $T(f \cdot g) = \lambda \mu f \cdot g$ mit $o \neq f \cdot g \in E$ ist, d.h. $\lambda \mu \in P\sigma(T)$.

Korollar: *Seien* E, T *und* λ *wie oben gewählt. Dann gilt* $\lambda \cdot A\sigma_Z(T) \subset A\sigma(T)$, *wobei* $A\sigma_Z(T)$ *zyklisch ist.*

Beweis: Man überlegt sich leicht, daß der zu E gehörende Einbettungsraum $\overline{E}$ (|20|, 2.1) wieder ein Simplexraum ist. Auch die Fortsetzung $\overline{T}$ von T auf $\overline{E}$ ist wieder ein vp-Markov-Operator, so daß die Behauptung aus (|20|, 2.4) und dem Satz folgt.

Literaturverzeichnis

| 1| Alfsen, E., Facial structure of compact convex sets, Proceedings London Math. Soc. 18 (1967), 385-4o4.

| 2| Bauer, H., Silovscher Rand und Dirichletsches Problem, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 11 (1961), 89-136.

| 3| ___ Konvexität in topologischen Vektorräumen, (Universität Hamburg 1964).

| 4| Bonsall, F.F., Sublinear functionals and ideals in partially ordered vector spaces, Proceedings London Math. Soc. 4 (1954), 4o2-418.

| 5| ___ Extreme maximal ideals of a partially ordered vector space, Proceedings AMS 7 (1956), 831-837.

| 6| Clifford, A.H., Partially ordered abelian groups, Ann. of Math. 41 (194o), 465-473.

| 7| Dauns, J. - Hofman, K.H., Representations of rings by sections, Mem. AMS 83 (1968).

| 8| Davies, E.B., The structure and ideal theory of the predual of a Banach lattice, Trans. AMS 131 (1968), 544-555.

| 9| Dixmier, J., Les C^*-Algebres et leurs representations, Gauthier Villars, Paris (1964).

|1o| Edwards, D.A., Séparations des fonctions réelles definies sur un simplex de Choquet, C,R. Acad. Sci. Paris 261 (1965), 2798-28oo.

|11| Effros, E., Order ideals in a C^*-algebra and its dual, Duke Math. J. 3o (1963), 391-412.

|12| ___ Structure in simplexes, Acta Math. 117 (1967), 1o3-121.

|13| ___ Structure in simplexes II, Journal of Funct. An.1 (1967), 379-391.

|14| Ellis, A.J., The duality of partially ordered normed spaces, Journal London Math. Soc. 39 (1964), 73o-744.

|15| ___ Perfect order ideals, Journal London Math. Soc. 4o (1965), 288-294.

|16| Jellett, F., Homomorphisms and Inverse Limits of Choquet Simplexes, Math. Z. 1o3 (1968), 219-226.

|17| Kadison, R.V., A representation theory for commutative topological algebra, Mem. AMS 7 (1951).

|18| Kellogg, O.D., Foundations of potential theory, Springer 1967.

|19| Kist, J., Indecomposable maximal ideals of a partially ordered vector space, Journal London Math. Soc. 36 (1961), 436-438.

|2o| Lotz, H.P., Über das Spektrum positiver Operatoren, Math.Z. 1o8 (1968), 15-32.

|21| ___ Zur Idealstruktur von Banachverbänden, Habilitationsschrift, Tübingen 1969.

|22| Prosser, R.T., On the ideal structure of operator algebras, Mem. AMS 45 (1963), 1-28.

|23| Schaefer, H.H., Topological vector spaces, Macmillan, New York 1966.

|24| ___ Invariant ideals of positive operators in C(X),I, Ill. Journal Math. 11 (1967), 7o3-715.

|25| ___ Invariant ideals of positive operators in C(X),II, Ill. Journal Math. 12 (1968), 525-538.

|26| Stone, M.H., Boolean Algebras and their applications to topology, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 2o (1934), 197-2o2.

|27| Størmer, E., On partially ordered vector spaces and their duals, with applications to simplexes and C^*-algebras, Proceedings London Math. Soc. 18 (1967), 245-265.

|28| Wolff, M., Über das Spektrum von Homomorphismen in Banachverbänden, erscheint in Math. Ann.

Lebenslauf

Am 23.11.1940 wurde ich, Rainer Nagel, als Sohn des Chefarztes Dr. med. Hans Nagel und seiner Frau Hedwig, geb. Halbe, in Horb am Neckar geboren.

Vom Herbst 1947 an besuchte ich 4 Jahre lang die Volksschule in Horb und anschließend das dortige Gymnasium, wo ich im März 1960 das Abitur bestand.

Im Sommersemester 1960 begann ich an der Universität Tübingen mit dem Studium der Mathematik und Physik. Außer in Tübingen studierte ich je ein Semester in Köln, Hamburg und an der 'faculté des sciences' der Sorbonne in Paris. Im Frühjahr 1967 legte ich dann in Tübingen das Staatsexamen in Mathematik und Physik ab.

Vom 1.6.1967 an verwaltete ich eine Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität Tübingen. In dieser Zeit entstand unter der Anleitung von Herrn Professor Dr. H.H. Schaefer die vorliegende Arbeit über "Idealtheorie in geordneten lokalkonvexen Vektorräumen".

Meine akademischen Lehrer waren in Köln die Herren Professoren G.Hoheisel und F.W.Schäfke, in Hamburg E.Artin, C. Meyer und C.F. von Weizsäcker und in Paris Y.Bruhat, C.Chevalley, M.Hervé und Ch.Pisot. In Tübingen waren es die Herren Professoren W.Braunbek, J.G.Hocking, K.H.Hofmann, H.Kneser, H.Krüger, G.Pickert, P.Roquette, H.H.Schaefer, H.Wielandt und K.Zeller.

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 19 a
Telefon 291063

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 19 a
Telefon 291063